TEORÍA DE LA INFORMACIÓN CONSCIENTE (TIC)

AUTOR : RODRIGO SEBASTIÁN NÚÑEZ ARÁOZ

FECHA : JULIO 14 DE 2026.

TUCUMÁN, ARGENTINA.

ASUNTO :

- El redondeo y uso de **(c = 300.000 km/s)** era de dominio público.
- La equivalencia **(E = MV^2)** y la velocidad de las ondas electromagnéticas transversales fue consagrada por Helmholtz (1847, 1896).
- Toda la maquinaria matemática de la **curvatura del espacio (k) y la métrica diferencial (ds)** ya estaba completamente unificada por Riemann, Gauss y Helmholtz en el siglo XIX.

VORTRÄGE UND REDEN

VON

HERMANN VON HELMHOLTZ

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1896

von der Gleichheit der Action und Reaction. Eine Bestätigung von ganz besonderer Wichtigkeit erhält die genannte Theorie noch dadurch, dass, wie Maxwell nachwies, genau dieselben Eigenschaften des imponderablen raumfüllenden Medium, welche ihm beigelegt werden mussten, um die Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus zu erklären, auch das Entstehen und die Verbreitung von elektrischen und magnetischen Oscillationen möglich machen, die wie Lichtschwingungen quer gegen den Strahl gerichtet, mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Licht sich fortpflanzen müssen. Elektricität, Magnetismus und Licht würden danach nur verschiedene Zustände und Bewegungen desselben Medium sein. Zu erwähnen ist, dass verschiedene Theile der Theorie des Lichts sich leichter und einfacher aus dieser neuen Hypothese herleiten lassen, als aus der älteren Form der Undulationstheorie von Huyghens, welche dem

PROPAGACIÓN DE OSCILACIONES ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS, QUE AL IGUAL QUE LAS VIBRACIONES 《LUMINOSAS》 .... , DEBEN PROPAGARSE A LA MISMA VELOCIDAD QUE LA LUZ.

PÁG. 257 , AÑO 1896 | MUCHO ANTES DE EINSTEIN.

acción y reacción. Esta teoría adquiere una importancia fundamental al comprobar que, como demostró Maxwell, las mismas propiedades del medio imponderable que se le atribuyen para explicar los fenómenos de la electricidad y el magnetismo también posibilitan la aparición y propagación de oscilaciones eléctricas y magnéticas, que, al igual que las vibraciones luminosas dirigidas transversalmente al haz, deben propagarse a la misma velocidad que la luz. La electricidad, el magnetismo y la luz serían, por lo tanto, simplemente estados y movimientos diferentes del mismo medio. Cabe mencionar que diversas partes de la teoría de la luz pueden derivarse con mayor facilidad y simplicidad de esta nueva hipótesis que de la versión anterior de la teoría de la ondulación de Huyghens, atribuida a von Helmholt (Lectures and Speeches, II. 17).

HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ

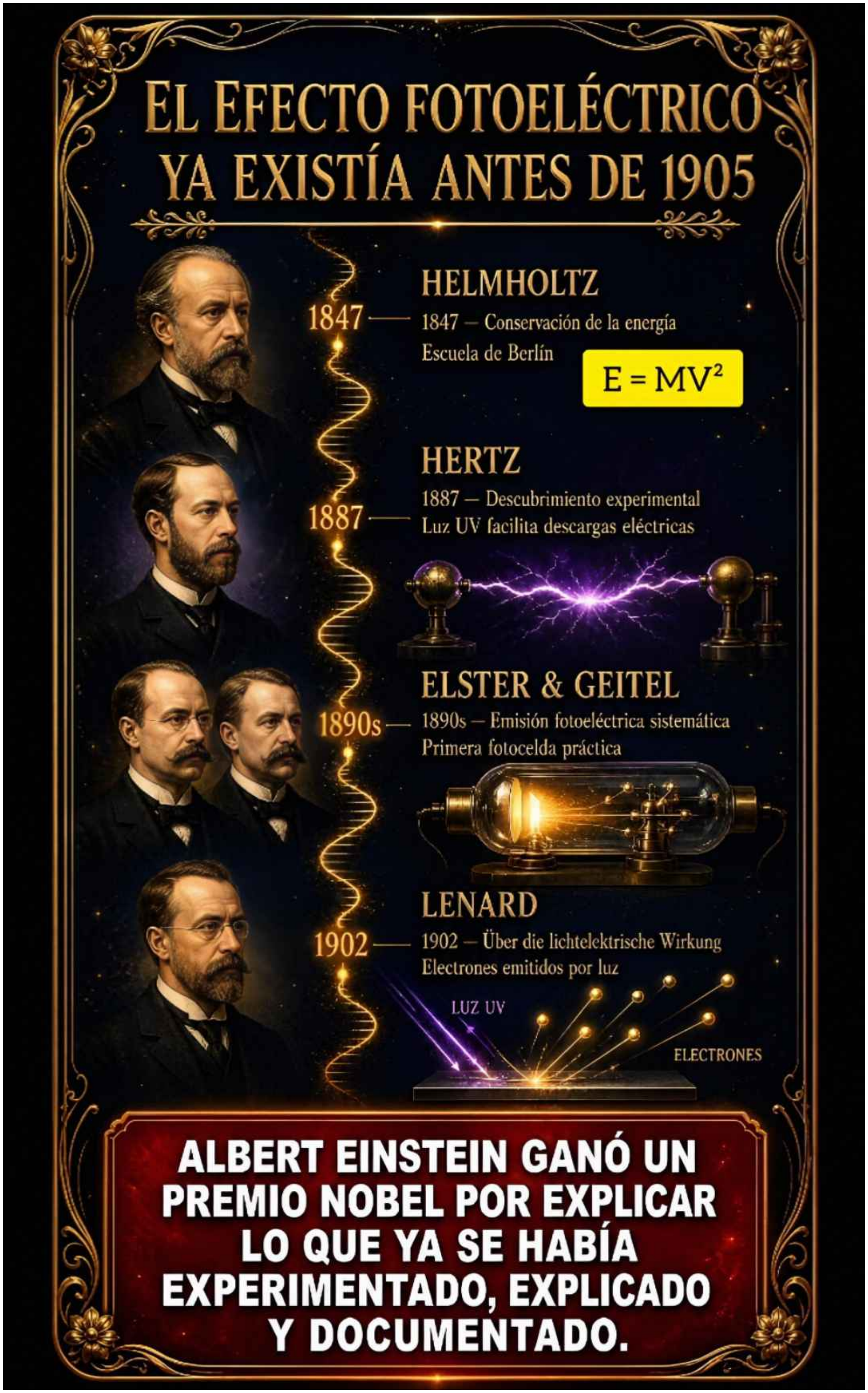
PÁG 257 , AÑO 1896.

— 257 —

von der Gleichheit der Action und Reaction. Eine Bestätigung von ganz besonderer Wichtigkeit erhält die genannte Theorie noch dadurch, dass, wie **Maxwell** nachwies, genau dieselben Eigenschaften des imponderablen raumfüllenden Medium, welche ihm beigelegt werden mussten, um die Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus zu erklären, auch das Entstehen und die Verbreitung von elektrischen und magnetischen Oscillationen möglich machen, die wie Lichtschwingungen quer gegen den Strahl gerichtet, mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Licht sich fortpflanzen müssen. Elektricität, Magnetismus und Licht würden danach nur verschiedene Zustände und Bewegungen desselben Medium sein. Zu erwähnen ist, dass verschiedene Theile der Theorie des Lichts sich leichter und einfacher aus dieser neuen Hypothese herleiten lassen, als aus der älteren Form der Undulationstheorie von **Huyghens**, welche dem

v. Helmholtz, Vorträge und Reden. II. 17

Cuando Einstein escribe su artículo de 1905 utilizó exactamente este mismo principio clásico de la propagación de ondas transversales electromagnéticas en el espacio, que Helmholtz ya había consagrado e indexado formalmente.


EL EFECTO FOTOELÉCTRICO
YA EXISTÍA ANTES DE 1905
HELMHOLTZ
1847
1847 – Conservación de la energía
Escuela de Berlín
$E = MV^2$
HERTZ
1887
1887 – Descubrimiento experimental
Luz UV facilita descargas eléctricas
ELSTER & GEITEL
1890s
1890s – Emisión fotoeléctrica sistemática
Primera fotocelda práctica
LENARD
1902
1902 – Über die lichtelektrische Wirkung
Electrones emitidos por luz
LUZ UV
ELECTRONES
ALBERT EINSTEIN GANÓ UN PREMIO NOBEL POR EXPLICAR LO QUE YA SE HABÍA EXPERIMENTADO, EXPLICADO Y DOCUMENTADO.

Lehrbuch der Physik

für die

oberen Classen der Mittelschulen.

Von

Dr. Alois Handl,
k. k. o. ö. Professor an der Universität in Czernowitz.

Mit 189 in den Text gedruckten Abbildungen.

Fünfte umgearbeitete Auflage.

Ausgabe für Realschulen.

Mit Erlass des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 6. November 1894, Z. 24.111, zum Unterrichtsgebrauche an Mittelschulen mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zugelassen.

Preis geheftet: 1 fl. 10 kr., gebunden: 1 fl. 30 kr.

Wien, 1894.
Alfred Hölder,
k. u. k. Hof- und Universitäts-Buchhändler,
Rothenthurmstraße 15.

194038 B

Digitalizado por Google

Verkleinerung der Öffnung lichtschwächer wird; man wird eine gewisse Größe der Öffnung finden können, bei welcher das Verhältnis von Deutlichkeit und Lichtstärke dem Gesammteindrucke am günstigsten ist. Die Gestalt der Öffnung ist dabei gleichgiltig. (Runde Sonnenbilder im Schatten des Laubes. Porta's Camera obscura.)

Die Erfahrung, dass die Fortpflanzung des Lichtes durch die Luft in der Regel in geraden Linien stattfindet, ist die Ursache, dass wir uns den Ausgangspunkt der in unser Auge fallenden Lichtstrahlen immer in der geradlinigen Verlängerung der letzten Richtung, welche dieselben vor dem Auge haben, vorstellen, selbst wenn wir aus anderen Gründen wissen, dass sie vorher irgend welche Veränderungen ihrer Richtung erfahren haben; z. B. durch Reflexion oder Brechung.

*** §. 253. Die Geschwindigkeit des Lichtes.** Diese ist auf verschiedene Weisen untersucht worden, welche wir nur dem Principe nach andeuten können:

1. Der Planet Jupiter hat vier Trabanten (Monde), welche denselben mit constanter Geschwindigkeit umkreisen und während eines jeden Umlaufes einmal in seinen Schatten treten, also verfinstert werden. Die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Verfinsterungen erscheinen uns etwas länger, wenn sich die Erde vom Jupiter entfernt und wieder kürzer während der Annäherung; der Zeitunterschied beträgt beim ersten, dem Jupiter nächsten Trabanten (der eine Umlaufszeit von $42^h\ 28^m\ 35^s$ hat) für je ein halbes Jahr: $16^m\ 26{\cdot}38^s = 986{\cdot}38^s$. Das ist also die Zeit, welche das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn (welcher nahe 307 Millionen Kilometer beträgt) zu durchlaufen; in einer Secunde macht es demnach einen Weg von $307 \times 10^6 : 986 =$ nahe 311 000 *km*. Eine derartige Berechnung wurde bereits 1676 vom Astronomen Römer angestellt.

2. Aus der Aberration der Fixsterne. Sämmtliche Fixsterne beschreiben während eines Jahres regelmäßig kleine Bahnen am Himmel, und zwar die in der Ekliptik gelegenen gerade Linien, die übrigen Ellipsen und die an der Achse der Ekliptik gelegenen Kreise. Die Durchmesser dieser Kreise, die großen Achsen aller Ellipsen und die Längen der Geraden sind alle einander gleich und betragen 40·5″. Der Grund davon ist folgender: Es sei A B (Fig. 138) der Weg, welchen der Beobachter mit der Erde in derselben Zeit zurücklegt, in welcher der in der Richtung S B ankommende Lichtstrahl die Strecke C B durchläuft; so muss ein Fernrohr, durch dessen Achse der Strahl (etwa so wie ein geworfener Körper) hindurchgehen soll, nicht die Richtung B S, sondern vielmehr $BS' \parallel CA$ haben; die Tangente des Aberrationswinkels $SBS' = ACB = \alpha$ ist $\operatorname{tg} \alpha = AB : BC$, abhängig vom Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Erde und des Lichtes. Nun ist $\alpha = 20{\cdot}25''$, $AB = 30{\cdot}796$ *km*, also $BC = AB : (20{\cdot}25 \times \operatorname{tg} 1'')$ nahezu $= 308.000$ *km*. (Bradley 1727.)

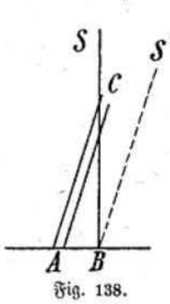


Fig. 138.

3. Diese Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit im Weltraume wurden ergänzt durch Beobachtungen an der Erdoberfläche. (Fizeau, 1849.) Diese bestanden im wesentlichen darin, dass die Strahlen einer Lichtquelle (L) (Fig. 139) durch einen Spiegel (S) gegen einen anderen, 8633 *m* weit entfernten Spiegel (S′)

Digitalizado por Google

und von diesem wieder zurück zum Beobachter (O) geleitet wurden. Durch Anwendung entsprechender Linsen wurde für die Erhaltung der gehörigen Lichtstärke gesorgt, worauf wir hier nicht näher eingehen. In den Weg dieser Strahlen war nun eine mit 720 Zähnen versehene Scheibe r r, um die Achse a a drehbar, gestellt, so dass die Zähne den Lichtstrahlen den Durchgang verwehrten, die Lücken ihn gestatteten. Wenn in der Zeit, in welcher das Licht den Weg $2 \times 8633\ m$ zurücklegt, ein Zahn an die Stelle einer Lücke getreten ist, so

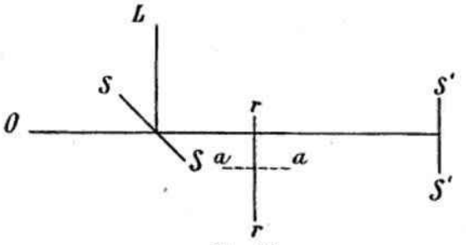


Fig. 139.

werden die zurückkehrenden Lichtstrahlen immer von ihm aufgehalten und das Auge bei O erhält kein Licht. Dies war der Fall, als die Scheibe 12·6 Umdrehungen in einer Secunde machte. Die Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen von $2 \times 8633\ m$ braucht, beträgt also $1 : (12{\cdot}6 \times 2 \times 720)$ Secunden, woraus sich die Geschwindigkeit in einer Secunde $= 313.000\ km$ ergibt. Foucault erhielt (1862) nach einer etwas anderen Methode $c = 298.000\ km$. Neueren Berechnungen zufolge kann man die Lichtgeschwindigkeit rund $= 300.000\ km/sec$ setzen.

Photometrie.

§. 254. Gesetze der Beleuchtungsstärke. Wenn sich Lichtwellen von einem Punkte aus nach allen Richtungen im Raume ausbreiten, so vertheilt sich die Energie derselben auf immer größere und größere Flächen, welche den Quadraten der Entfernungen proportional sind. Die auf eine Flächeneinheit entfallende Energie (Lichtstärke) muss daher dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle verkehrt proportional sein. In der That zeigt der Versuch, dass 2, 3 oder 4 gleiche Lichtquellen (Kerzenflammen) in den Entfernungen $1{\cdot}41 = \sqrt{2}, 1{\cdot}73 = \sqrt{3}$, oder $2 = \sqrt{4}$ dieselbe Lichtstärke erzeugen wie eine Lichtquelle gleicher Art in der Entfernung $= 1$.

Die Stärke der Beleuchtung einer Fläche ist ferner unter sonst gleichen Umständen dem Cosinus des Einfallwinkels der (als parallel angenommenen) Strahlen proportional. Denn es sei Fig. 140 SabS der Längsdurchschnitt eines Strahlenbündels; wird das einemal eine durch a b, das anderemal eine durch a c gelegte Fläche von diesem Lichte getroffen, so muss die Wirkung auf eine Flächeneinheit der Anzahl der vorhandenen Flächeneinheiten verkehrt proportional sein;

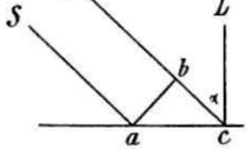


Fig. 140.

wenn also die Beleuchtungsstärke auf a b mit B, auf a c mit B_1 bezeichnet wird, so wird $B : B_1 = ac : ab = 1 : \cos \alpha$ oder $B_1 = B \,.\, \cos \alpha$.

Ferner ist die Beleuchtungsstärke von der Beschaffenheit der beleuchteten Fläche abhängig. Sie wird nämlich dadurch bedingt, dass ein größerer oder kleinerer

Digitalizado por Google

C YA EXISTÍA (300.000 KM/ S) , NO ES INVENTO DE EINSTEIN.

THE EVANSTON COLLOQUIUM

LECTURES ON MATHEMATICS

DELIVERED

FROM AUG. 28 TO SEPT. 9, 1893

BEFORE MEMBERS OF THE CONGRESS OF MATHEMATICS HELD IN CONNECTION WITH THE WORLD'S FAIR IN CHICAGO

AT NORTHWESTERN UNIVERSITY

EVANSTON, ILL.

BY

FELIX KLEIN

REPORTED BY ALEXANDER ZIWET

PUBLISHED FOR H. S. WHITE AND A. ZIWET

New York

MACMILLAN AND CO.

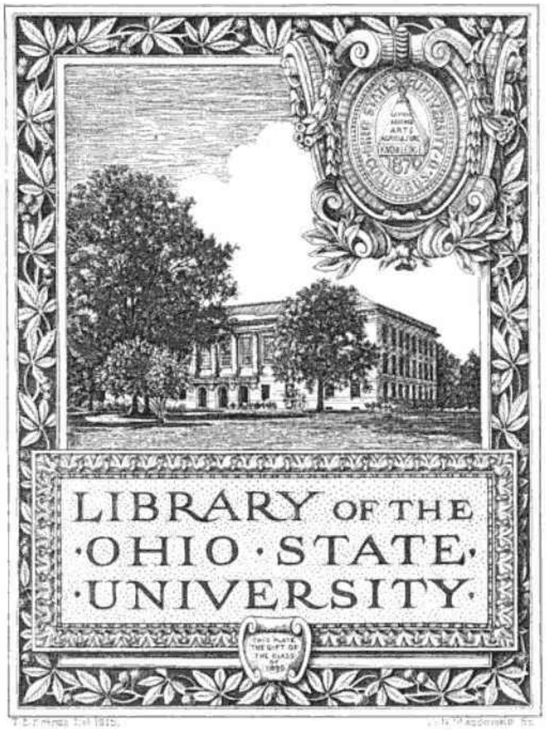
AND LONDON

1894

All rights reserved

Digitalizado por Google

see p.8 & p.24



LECTURE XI.: THE MOST RECENT RESEARCHES IN NON-EUCLIDEAN GEOMETRY.

(September 8, 1893.)

MY remarks to-day will be confined to the progress of non-Euclidean geometry during the last few years. Before reporting on these latest developments, however, I must briefly summarize what may be regarded as the general state of opinion among mathematicians in this field. There are three points of view from which non-Euclidean geometry has been considered.

(1) First we have the point of view of elementary geometry, of which Lobachevsky and Bolyai themselves are representatives. Both begin with simple geometrical constructions, proceeding just like Euclid, except that they substitute another axiom for the axiom of parallels. Thus they build up a system of non-Euclidean geometry in which the length of the line is infinite, and the "measure of curvature" (to anticipate a term not used by them) is negative. It is, of course, possible by a similar process to obtain the geometry with a positive measure of curvature, first suggested by Riemann; it is only necessary to formulate the axioms so as to make the length of a line finite, whereby the existence of parallels is made impossible.

(2) From the point of view of projective geometry, we begin by establishing the system of projective geometry in the sense of von Staudt, introducing projective co-ordinates, so that straight lines and planes are given by *linear* equations. Cay-

Digitalizado por Google

ley's theory of projective measurement leads then directly to the three possible cases of non-Euclidean geometry: hyperbolic, parabolic, and elliptic, according as the measure of curvature k is <0, $=0$, or >0. It is here, of course, essential to adopt the system of von Staudt and not that of Steiner, since the latter defines the anharmonic ratio by means of distances of points, and not by pure projective constructions.

(3) Finally, we have the point of view of Riemann and Helmholtz. Riemann starts with the idea of the element of distance ds, which he assumes to be expressible in the form

$$ds = \sqrt{\Sigma a_{ik} dx_i dx_k}.$$

Helmholtz, in trying to find a reason for this assumption, considers the motions of a rigid body in space, and derives from these the necessity of giving to ds the form indicated. On the other hand, Riemann introduces the fundamental notion of the *measure of curvature of space*.

The idea of a measure of curvature for the case of two variables, *i.e.* for a surface in a three-dimensional space, is due to Gauss, who showed that this is an intrinsic characteristic of the surface quite independent of the higher space in which the surface happens to be situated. This point has given rise to a misunderstanding on the part of many non-Euclidean writers. When Riemann attributes to his space of three dimensions a measure of curvature k, he only wants to say that there exists an invariant of the "form" $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$; he does not mean to imply that the three-dimensional space necessarily exists as a curved space in a space of four dimensions. Similarly, the illustration of a space of constant positive measure of curvature by the familiar example of the sphere is somewhat misleading. Owing to the fact that on the sphere the geodesic lines (great circles) issuing from any point all meet again in another definite

Digitalizado por Google

point, antipodal, so to speak, to the original point, the existence of such an antipodal point has sometimes been regarded as a necessary consequence of the assumption of a constant positive curvature. The projective theory of non-Euclidean space shows immediately that the existence of an antipodal point, though compatible with the nature of an elliptic space, is not necessary, but that two geodesic lines in such a space may intersect in one point if at all.*

I call attention to these details in order to show that there is some advantage in adopting the second of the three points of view characterized above, although the third is at least equally important. Indeed, our ideas of space come to us through the senses of vision and motion, the "optical properties" of space forming one source, while the "mechanical properties" form another; the former corresponds in a general way to the projective properties, the latter to those discussed by Helmholtz.

As mentioned before, from the point of view of projective geometry, von Staudt's system should be adopted as the basis. It might be argued that von Staudt practically assumes the axiom of parallels (in postulating a one-to-one correspondence between a pencil of lines and a row of points). But I have shown in the *Math. Annalen*† how this apparent difficulty can be overcome by restricting all constructions of von Staudt to a limited portion of space.

I now proceed to give an account of the most recent researches in non-Euclidean geometry made by Lie and myself. Lie published a brief paper on the subject in the *Berichte* of the Saxon Academy (1886), and a more extensive exposition of his views in the same *Berichte* for 1890 and 1891. These

* This theory has also been developed by Newcomb, in the *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Vol. 83 (1877), pp. 293–299.

† *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Annalen, Vol. 6 (1873), pp. 112–145.

Digitalizado por Google

papers contain an application of Lie's theory of continuous groups to the problem formulated by Helmholtz. I have the more pleasure in placing before you the results of Lie's investigations as they are not taken into due account in my paper on the foundations of projective geometry in Vol. 37 of the *Math. Annalen* (1890),* nor in my (lithographed) lectures on non-Euclidean geometry delivered at Göttingen in 1889–90; the last two papers of Lie appeared too late to be considered, while the first had somehow escaped my memory.

I must begin by stating the problem of Helmholtz in modern terminology. The motions of three-dimensional space are ∞^6, and form a group, say G_6. This group is known to have an invariant for any two points p, p', viz. the distance $\Omega(p, p')$ of these points. But the form of this invariant (and generally the form of the group) in terms of the co-ordinates x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 of the points is not known *a priori*. The question arises whether the group of motions is fully characterized by these two properties so that none but the Euclidean and the two non-Euclidean systems of geometry are possible.

For illustration Helmholtz made use of the analogous case in two dimensions. Here we have a group of ∞^3 motions; the distance is again an invariant; and yet it is possible to construct a group not belonging to any one of our three systems, as follows.

Let z be a complex variable; the substitution characterizing the group of Euclidean geometry can be written in the well-known form

$$z' = e^{i\phi}z + m + in = (\cos\phi + i\sin\phi)z + m + in.$$

Now modifying this expression by introducing a complex number in the exponent,

$$z' = e^{(a+i)\phi}z + m + in = e^{a\phi}(\cos\phi + i\sin\phi)z + m + in,$$

* *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, pp. 544–572.

Digitalizado por Google

we obtain a group of transformations by which a point (in the simple case $m=0$, $n=0$) would not move about the origin in a circle, but in a logarithmic spiral; and yet this is a group G_3 with three variable parameters m, n, ϕ, having an invariant for every two points, just like the original group. Helmholtz concludes, therefore, that a new condition, that of *monodromy*, must be added to determine our group completely.

I now proceed to the work of Lie. First as to the results: Lie has confirmed those of Helmholtz with the single exception that in space of three dimensions the axiom of monodromy is not needed, but that the groups to be considered are fully determined by the other axioms. As regards the proofs, however, Lie has shown that the considerations of Helmholtz must be supplemented. The matter is this. In keeping one point of space fixed, our G_6 will be reduced to a G_3. Now Helmholtz inquires how the differentials of the lines issuing from the fixed point are transformed by this G_3. For this purpose he writes down the formulæ

$$dx_1' = a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3,$$
$$dx_2' = a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3,$$
$$dx_3' = a_{31}dx_1 + a_{32}dx_2 + a_{33}dx_3,$$

and considers the coefficients a_{11}, a_{12}, $\cdots$ a_{33} as depending on three variable parameters. But Lie remarks that this is not sufficiently general. The linear equations given above represent only the first terms of power series, and the possibility must be considered that the three parameters of the group may not all be involved in the linear terms. In order to treat all possible cases, the general developments of Lie's theory of groups must be applied, and this is just what Lie does.

Let me now say a few words on my own recent researches in non-Euclidean geometry which will be found in a paper published in the *Math. Annalen*, Vol. 37 (1890), p. 544. Their

Digitalizado por Google

result is that our ideas as to non-Euclidean space are still very incomplete. Indeed, all the researches of Riemann, Helmholtz, Lie, consider only a portion of space surrounding the origin; they establish the existence of analytic laws in the vicinity of that point. Now this space can of course be continued, and the question is to see what kind of connection of space may result from this continuation. It is found that there are different possibilities, each of the three geometries giving rise to a series of subdivisions.

To understand better what is meant by these varieties of connection, let us compare the geometry on a sphere with that in the sheaf of lines formed by the diameters of the sphere. Considering each diameter as an infinite line or ray passing through the centre (not a half-ray issuing from the centre), to each line of the sheaf there will correspond two points on the sphere, viz. the two points of intersection of the line with the sphere. We have, therefore, a one-to-two correspondence between the lines of the sheaf and the points of the sphere. Let us now take a small area on the sphere; it is clear that the distance of two points contained in this area is equal to the angle of the corresponding lines of the sheaf. Thus the geometry of points on the sphere and the geometry of lines in the sheaf are identical as far as small regions are concerned, both corresponding to the assumption of a constant positive measure of curvature. A difference appears, however, as soon as we consider the whole closed sphere on the one hand and the complete sheaf on the other. Let us take, for instance, two geodesic lines of the sphere, *i.e.* two great circles, which evidently intersect in two (diametral) points. The corresponding pencils of the sheaf have only *one* straight line in common.

A second example for this distinction occurs in comparing the geometry of the Euclidean plane with the geometry on a closed cylindrical surface. The latter can be developed in the

Digitalizado por Google

coincidence by bending the parallelogram (which evidently would be impossible without stretching); but only the logical convention is made that the opposite points should be considered as identical. Here, then, we have a closed manifoldness of the connectivity of an anchor-ring, and every one will see the great differences that exist here in comparison with the Euclidean plane in everything concerning the lengths and the intersections of geodesic lines, etc.

It is interesting to consider the G_3 of Euclidean motions on this surface. There is no longer any possibility of moving the surface on itself in ∞^3 ways, the closed surface being considered in its totality. But there is no difficulty in moving any small area over the closed surface in ∞^3 ways.

We have thus found, in addition to the Euclidean plane, two other forms of surfaces: the strip between parallels and Clifford's parallelogram. Similarly we have by the side of ordinary Euclidean space three other types with the Euclidean element of arc; one of these results from considering a parallelepiped.

Here I introduce the axiomatic element. There is no way of proving that the whole of space can be moved in itself in ∞^6 ways; all we know is that small portions of space can be moved in space in ∞^6 ways. Hence there exists the possibility that our actual space, the measure of curvature being taken as zero, may correspond to any one of the four cases.

Carrying out the same considerations for the spaces of constant positive measure of curvature, we are led back to the two cases of elliptic and spherical geometry mentioned before. If, however, the measure of curvature be assumed as a negative constant, we obtain an infinite number of cases, corresponding exactly to the configurations considered by Poincaré and myself in the theory of automorphic functions. This I shall not stop to develop here.

Digitalizado por Google

usual way into a strip of the plane bounded by two parallel lines, as will appear from Fig. 20, the arrows indicating that the opposite points of the edges are coincident on the cylindrical surface. We notice at once the difference: while in the plane all geodesic lines are infinite, on the cylinder there is

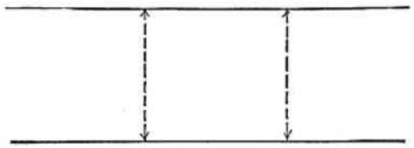


Fig. 20.

one geodesic line that is of finite length, and while in the plane two geodesic lines always intersect in one point, if at all, on the cylinder there may be ∞ points of intersection.

This second example was generalized by Clifford in an address before the Bradford meeting of the British Association (1873). In accordance with Clifford's general idea, we may define a closed surface by taking a parallelogram out of an ordinary plane and making the opposite edges correspond point to point as indicated in Fig. 21. It is not to be understood that the opposite edges should be brought to

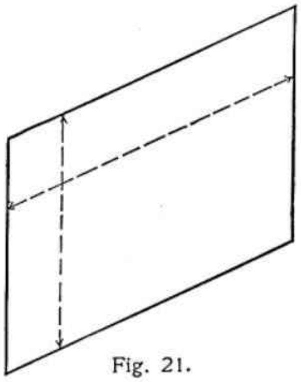


Fig. 21.

Digitalizado por Google

I may add that Killing has verified this whole theory.* It is evident that from this point of view many assertions concerning space made by previous writers are no longer correct (*e.g.* that infinity of space is a consequence of zero curvature), so that we are forced to the opinion that our geometrical demonstrations have no absolute objective truth, but are true only for the present state of our knowledge. These demonstrations are always confined within the range of the space-conceptions that are familiar to us; and we can never tell whether an enlarged conception may not lead to further possibilities that would have to be taken into account. From this point of view we are led in geometry to a certain modesty, such as is always in place in the physical sciences.

* *Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen,* Math. Annalen, Vol. 39 (1891), pp. 257–278.

Digitalizado por Google

DETALLE CLAVE : CURVATURA DEL ESPACIO .

ley's theory of projective measurement leads then directly to the three possible cases of non-Euclidean geometry: hyperbolic, parabolic, and elliptic, according as the measure of curvature k is <0, $=0$, or >0. It is here, of course, essential to adopt the system of von Staudt and not that of Steiner, since the latter defines the anharmonic ratio by means of distances of points, and not by pure projective constructions.

(3) Finally, we have the point of view of Riemann and Helmholtz. Riemann starts with the idea of the element of distance ds, which he assumes to be expressible in the form

$$ds = \sqrt{\Sigma a_{ik} dx_i dx_k}.$$

Helmholtz, in trying to find a reason for this assumption, considers the motions of a rigid body in space, and derives from these the necessity of giving to ds the form indicated. On the other hand, Riemann introduces the fundamental notion of the *measure of curvature of space*.

El documento muestra la fórmula exacta que define la geometría de un espacio métrico:

$$ds = \sqrt{\sum a_{ik} dx_i dx_k}$$

El Mito del Número C

El manual escolar del Dr. Alois Handl (Viena, 1894) demuestra que el redondeo universal a los 300.000 km/s era un conocimiento básico de dominio público.

Einstein no calculó esta constante; la heredó de los experimentos ópticos de Fizeau y Foucault recopilados en el siglo XIX.

El Mito de la Curvatura Espacial (k) , (ds)

Las conferencias de Felix Klein en el Coloquio de Evanston (1893) prueban que toda la maquinaria matemática de la curvatura del espacio k , y la métrica diferencial cuadrática ds , ya estaba completamente unificada por Gauss, Riemann y Helmholtz . La fórmula exacta del diferencial de distancia que define la geometría de un espacio métrico .